SOLUZIONI

Politecnico di Milano
Facoltà di Ingegneria

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Prof. F. Dercole
Appello del 03/05/2012

COGNOME:________________________ NOME: ________________________

MATRICOLA: ________________________

AVVERTENZA
I candidati potranno **prendere visione del compito corretto** e discutere dell'esito complessivo dell'esame:

Venerdì 18/5 ore 14.30 aula PT1 (DEI, ed. 20, piano terra, entrando sulla sinistra)

In base alla normativa in vigore, in assenza di rinuncia esplicita, **una votazione positiva sarà registrata d'ufficio senza la firma dello studente** e non sarà più modificabile dal docente.

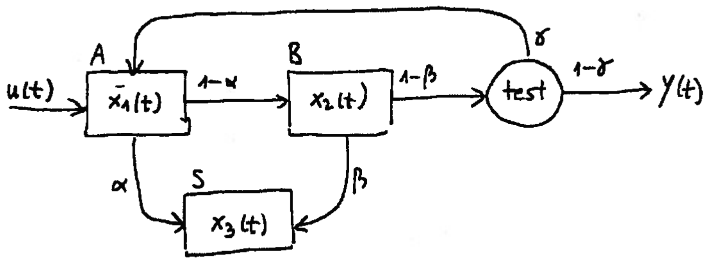
FIRMA: ____ Visto del docente:______

Voto totale:

6	6	6	6	6	1	1	32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza dell'esposizione.

1) Un processo di produzione si articola in due fasi, A e B, come schematizzato in figura.



La lavorazione avviene per periodi di durata costante la cui successione è indicata con la variabile $t = 0, 1, 2,\ldots$ Alla fine di ogni periodo di lavorazione (per es. il t-esimo), $u(t)$ unità di materiale da lavorare vengono poste in fase A. Del materiale lavorato in fase A durante il periodo, una frazione α ($0 < \alpha < 1$) di scarto viene accumulata in una scorta S per usi futuri, mentre la restante parte viene passata in fase B. Del materiale lavorato in fase B, una frazione β ($0 < \beta < 1$) di scarto viene accumulata nella scorta S, mentre la restante parte viene sottoposta a un test di qualità che mediamente ne scarta una frazione γ ($0 < \gamma < 1$) e riporta il materiale scartato in fase A per il periodo di lavorazione successivo. Indicando con $x_1(t)$, $x_2(t)$, e $x_3(t)$, rispettivamente le unità di materiale presenti in fase A, B e nella scorta S durante il periodo di lavorazione t-esimo e con $y(t)$ le unità di materiale finito prodotte alla fine dello stesso periodo,

a) si descriva il processo produttivo mediante un sistema dinamico lineare a tempo discreto;

b) si discuta la stabilità del sistema;

c) si calcoli la funzione di trasferimento e il guadagno;

d) si dica, giustificando la risposta, di che ordine è il modello ARMA del sistema.

---

a) $x_1(t+1) = u(t) + (1-\beta)\gamma\, x_2(t)$

$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$

$x_3(t+1) = x_3(t) + \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$

$y(t) = (1-\beta)(1-\gamma)\, x_2(t)$

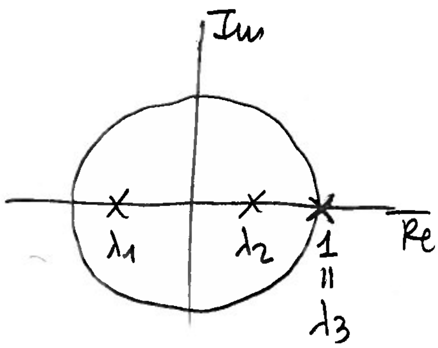
$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & (1-\beta)\gamma & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{array}\right] \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & (1-\beta)(1-\gamma) & 0 \end{bmatrix} \quad d = [0]$$

b) A triangolare a blocchi

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)\gamma}\,,\ \lambda_3 = 1$

$|\lambda_{1,2}| < 1 \rightarrow \Sigma$ semplicemente stab.



c) $z x_1 = u + (1-\beta)\gamma x_2$

$z x_2 = (1-\alpha) x_1$

$\to z^2 x_2 = (1-\alpha) z x_1 = (1-\alpha) u + (1-\alpha)(1-\beta)\gamma x_2$

$\to x_2 = \dfrac{(1-\alpha)}{z^2 - (1-\alpha)(1-\beta)\gamma} u$

$$y = (1-\beta)(1-\gamma) x_2 \Rightarrow G(z) = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{z^2 - (1-\alpha)(1-\beta)\gamma}$$

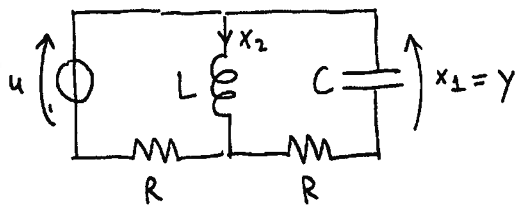
$$\mu = G(1) = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{1 - (1-\alpha)(1-\beta)\gamma}$$

d) Il modello ARMA e' del II ordine

$$y(t+2) - (1-\alpha)(1-\beta)\gamma\, y(t) = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\, u(t)$$

perché la scorta non è "osservabile" sull'uscita.

2) Si consideri il circuito in figura.



a) Si descriva il circuito mediante un sistema dinamico lineare a tempo continuo, usando le variabili di stato x_1 e x_2 in figura.

b) Si discuta la stabilità del sistema.

c) Supponendo C = 0.05F, L = 0.05H e R = 1ohm, si dica se il sistema è completamente raggiungibile.

d) Per i valori di R, L e C al punto c) si progetti, se possibile, una legge di controllo $u = [k_1\ k_2]\, x + v$ che elimini eventuali oscillazioni nella risposta a scalino del sistema in anello chiuso (con ingresso v), mantenendo invariato il tempo di risposta.

---

a) $\dot{x}_1 = \frac{1}{C} I$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}(x_1 + RI)$

I: vedi figura

$RI + x_1 - u + R(I + x_2) = 0$

$I = (u - x_1 - Rx_2)/2R$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2RC} & -\frac{1}{2C} \\ \frac{1}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2RC} \\ \frac{1}{2L} \end{bmatrix}$$

b) $\mathrm{tr}\, A = -\left(\frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L}\right) < 0$, $\det A = \frac{\cancel{R}}{4RLC} + \frac{1}{4LC} > 0 \Rightarrow \Sigma$ as. stab.

c) $$A = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad R = [b\ Ab] = \begin{bmatrix} 10 & -200 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det R \neq 0 \Rightarrow \Sigma$ c.r.

d) Si, è possibile perché il sistema è c.r.

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + 20\lambda + 200 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -10 \pm \sqrt{100-200} = -10 \pm i10$$

Senza legge di controllo ci sono oscillazioni nella risposta a scalino e il tempo di risposta è $\simeq 5T_d = 0,5$ sec.

Con la legge di controllo

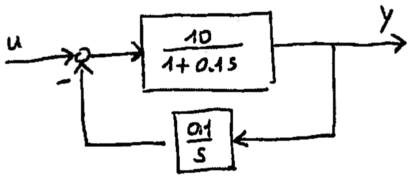
$$A + bk^T = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10+10k_1 & -10+10k_2 \\ 10+10k_1 & -10+10k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{A+bk^T}(\lambda) = \lambda^2 + (20 - 10k_1 - 10k_2)\lambda +$$

$$+ \underbrace{(-10+10k_1)(-10+10k_2) - (-10+10k_2)(10+10k_1)}_{(200-200k_2)} = \underbrace{(\lambda+10)^2}_{\text{poli reali con } T_d \text{ invariata}}$$

$$\begin{cases} 20 - 10k_1 - 10k_2 = 20 & \rightarrow k_1 = -k_2 = -1/2 \\ 200 - 200k_2 = 100 & \rightarrow k_2 = 1/2 \end{cases}$$

3)



a) Si discutano le proprietà della risposta allo scalino del sistema in figura e se ne tracci un andamento qualitativo.

b) Si tracci, anche in modo approssimato, il diagramma del modulo della risposta in frequenza del sistema.

c) Sulla base del diagramma tracciato al punto b), si dica, giustificando la risposta, se il sistema presenta una frequenza di risonanza.

d) Sulla base del diagramma tracciato al punto b), si determini, giustificando la risposta, la banda del sistema.

---

a) $$G(s) = \frac{\frac{10}{1+0.1s}}{1+\frac{1}{s(1+0.1s)}} = \frac{10s}{1+s+0.1s^2} = \frac{100s}{s^2+10s+10}$$

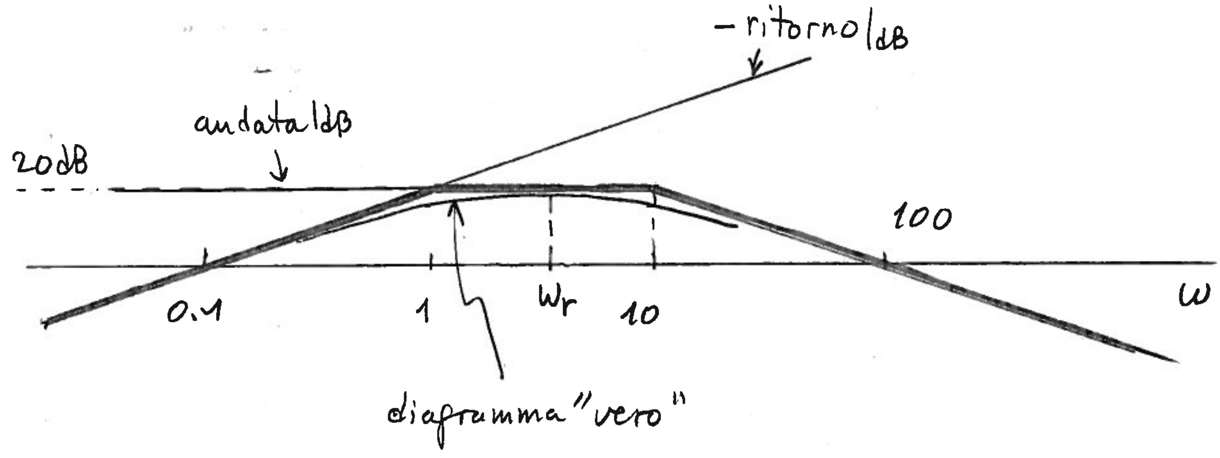
$\rightarrow s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-10} \simeq \begin{cases} -1 \\ -9 \end{cases} \Rightarrow \Sigma$ est. stab $\rightarrow y(\infty) = \mu = G(0) = 0$

$\rightarrow$ tempo di risposta $\cong 5T_d \cong 5$

$\rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \beta_1 = 100 > 0$

$\rightarrow$ poli reali $\rightarrow$ no oscillazioni

b) Il diagramma è quello spesso

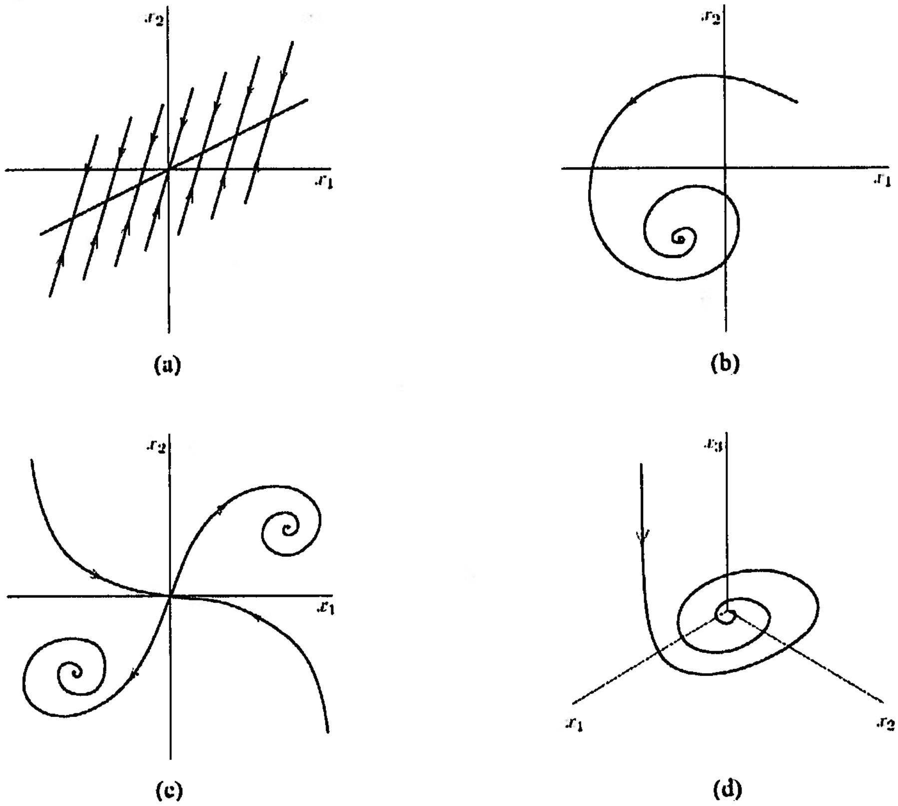


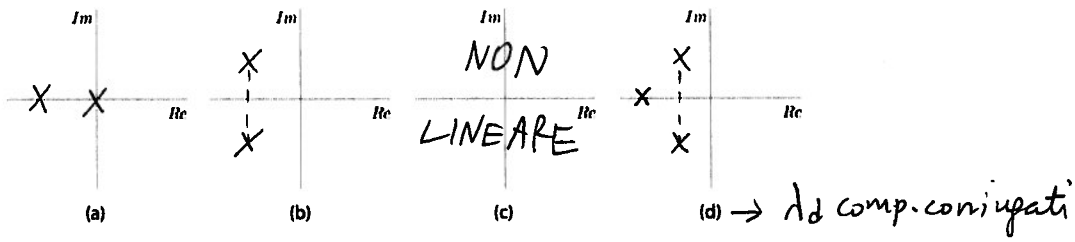
c) Sì, ω_r, compresa tra $\omega = 1$ e $\omega = 10$, dove è massimo il modulo della risp. in freq.

d) $B \cong [1, 10]$

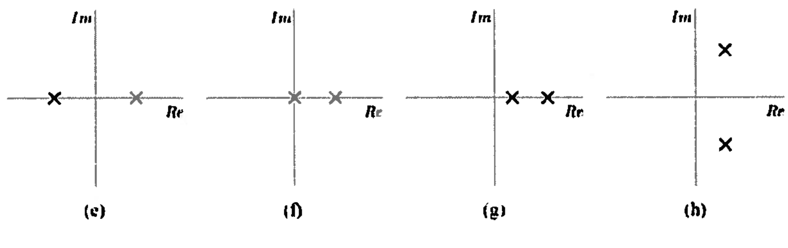
4)

a) Nei quattro riquadri (a), (b), (c) e (d) sono rappresentate alcune traiettorie di sistemi dinamici a tempo continuo. Nei casi in cui sia possibile che esse siano ricavate da sistemi lineari con ingresso costante, si indichi la posizione qualitativa degli autovalori nel corrispondente piano complesso.

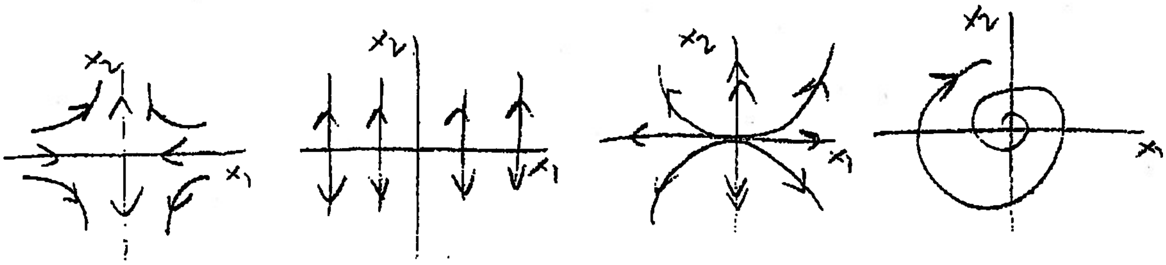




b) Nei riquadri (e), (f), (g) e (h) sono rappresentati gli autovalori di sistemi dinamici lineari a tempo continuo (del secondo ordine), cui è applicato un ingresso nullo. Si tracci l'andamento qualitativo delle traiettorie, ipotizzando a piacere, laddove necessario, la posizione degli autovettori nel piano di stato.



b)



(e) (f) (g) (h)

5) Le affermazioni sotto riportate riguardano sistemi dinamici lineari.

a) Si sottolinei l'unica affermazione vera.

- Un sistema a sfasamento non minimo non può essere esternamente stabile.
- La risposta a scalino di un sistema a sfasamento minimo ha inizialmente segno opposto al guadagno.
- La risposta a scalino di un sistema esternamente stabile può divergere.
- L'uscita di un sistema esternamente stabile con ingresso limitato può divergere.
- I sistemi a tempo discreto sono irreversibili.
- Un sistema a tempo continuo non può essere reversibile.
- Un sistema completamente raggiungibile non può essere instabile.

b) Si sottolinei l'unica affermazione falsa.

- I sistemi senza zeri sono a sfasamento minimo.
- I sistemi completamente raggiungibili e osservabili con zeri nella regione di stabilità hanno ingressi nascosti evanescenti.
- Un aggregato di sistemi completamente raggiungibili e osservabili può essere non completamente raggiungibile e osservabile.
- Un sistema asintoticamente stabile con ingresso costante ha un solo stato di equilibrio.
- Il guadagno di un sistema a tempo continuo con f.d.t. $G(s)$ è $G(0)$.
- I sistemi asintoticamente stabili sono esternamente stabili.
- I sistemi con poli nella regione di stabilità sono asintoticamente stabili.

6) Si scrivano i comandi Matlab per simulare l'andamento dell'uscita di un sistema dinamico lineare a tempo continuo (tempo-invariante) partendo dalla condizione iniziale nulla su di un orizzonte temporale di 100 unità di tempo, con ingresso sinusoidale u = sen($2t$). Si supponga che il sistema sia già stato definito e memorizzato nella variabile Matlab S.

```
t=0:0.001:100;
u=sin(2*t);
lsim(S,u,t)
```

7) Si dica se nel videogioco CONVOGLIO le macchine che corrono sull'autostrada sono viste dall'alto o di fianco.

Risposta: ..dall'alto.........